

Probeklausur zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Hinweise:

Es gibt maximal 80 Punkte mit einer vorgesehenen Bestehensgrenze von 40 Punkten.
 Die vorgesehene Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Aufgabe 1:

14 Punkte

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wenn u und v die einzigen Knoten ungeraden Grades eines Graphen G sind, dann enthält G einen uv -Pfad.
- Wenn ein Graph G mit $\delta(G) \geq 2$ eine Artikulation enthält, dann enthält er auch eine Brücke.
- Wenn ein Graph G mit $\delta(G) \geq 2$ eine Brücke enthält, dann enthält er auch eine Artikulation.
- Für jeden Baum T der Ordnung $n(T) = 8k$ mit $k \geq 1$ gilt $\nu(T) \geq k$.
- Wenn $\mu(G) = 0$ für einen Graphen G , dann $\chi(G) \leq 2$.
- Wenn $\mu(G) = 3$ für einen Graphen G , dann $\chi(G) \leq 3$.

Aufgabe 2:

6 Punkte

Ist der Graph G in Abbildung 1 planar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

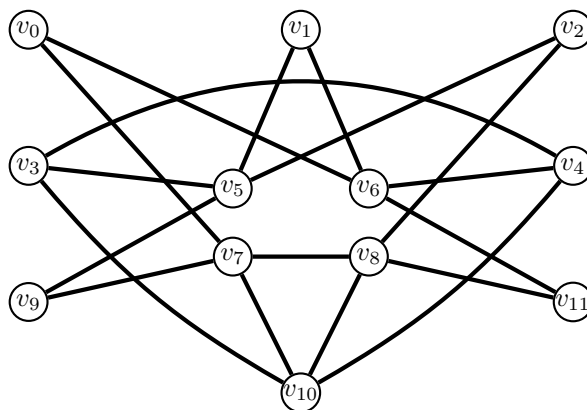


Abbildung 1: Der Graph G in Aufgabe 2.

Aufgabe 3:

6 Punkte

Beantworten Sie folgende Fragen mit Begründung.

- Gibt es einen planaren Graphen mit der Gradsequenz $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$?
- Gibt es einen planaren Graphen mit der Gradsequenz $(3, 3, 4, 5, 5, 6, 6)$?

Aufgabe 4:**8 Punkte**

Seien F und F' zwei Wälder mit $V(F) = V(F')$ und $m(F) < m(F')$.

Zeigen Sie, dass es eine Kante $e \in E(F') \setminus E(F)$ gibt so, dass $F + e$ wieder ein Wald ist.

Aufgabe 5:**8 Punkte**

Sei G ein Graph.

- a) Zeigen Sie $\lambda(G) \geq 2$, wenn G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume besitzt.
- b) Gilt die Umkehrung in a) auch, das heißt, folgt aus $\lambda(G) \geq 2$, dass G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume besitzt?

Aufgabe 6:**10 Punkte**

Sei $k \geq 3$ eine ganze Zahl und sei G_k der Graph mit

$$V(G_k) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq k\} \quad \text{und} \quad E(G_k) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i \mid 1 \leq i < k\} \cup \{u_k u_1, u_k v_k\}.$$

- a) Zeichnen Sie G_4 und G_5 .
- b) Bestimmen Sie $\chi(G_k)$ für alle $k \geq 3$.
- c) Bestimmen Sie $\chi'(G_k)$ für alle $k \geq 3$.

Aufgabe 7:**14 Punkte**

Sei G ein Graph der Ordnung n so, dass für alle Paare nicht adjazenter Knoten x und y gilt $d(x) + d(y) \geq n - 1$. Zeigen Sie, dass G semi-Hamiltonsch ist.

Aufgabe 8:**14 Punkte**

Es sei $G = K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$ der vollständige p -partite Graph mit $p \geq 2$ und $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$. Zeigen Sie, dass G genau dann einen 1-Faktor besitzt, wenn $n(G)$ gerade ist und $\sum_{i=1}^{p-1} r_i \geq r_p$ gilt.

Viel Erfolg!