

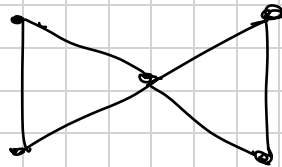
Aufgabe 1:**14 Punkte**

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- a) Wenn u und v die einzigen Knoten ungeraden Grades eines Graphen G sind, dann enthält G einen uv -Pfad.
- b) Wenn ein Graph G mit $\delta(G) \geq 2$ eine Artikulation enthält, dann enthält er auch eine Brücke.
- c) Wenn ein Graph G mit $\delta(G) \geq 2$ eine Brücke enthält, dann enthält er auch eine Artikulation.
- d) Für jeden Baum T der Ordnung $n(T) = 8k$ mit $k \geq 1$ gilt $\nu(T) \geq k$.
- e) Wenn $\mu(G) = 0$ für einen Graphen G , dann $\chi(G) \leq 2$.
- f) Wenn $\mu(G) = 3$ für einen Graphen G , dann $\chi(G) \leq 3$.

(a) Angenommen, u und v liegen in den unterschiedlichen Zshg-Komponenten C_u und C_v . Da aber u, v die einzigen Knoten ungeraden Grades sind, enthält C_u bzw. C_v nur einen einzigen Knoten ungeraden Grades, was widerspricht dafür, dass die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in einem beliebigen Graphen gerade ist.

(b) Gegenbsp:

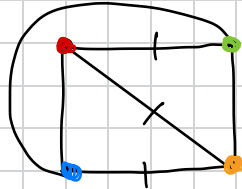


(c) Sei G mit $\delta(G) \geq 2$ und mit einer Brücke $\{ab\} \in E(G)$. Die Bedingung $\delta(G) \geq 2$ garantiert, dass $d(a), d(b) \geq 2$, und damit das Entfernen einer dieser Knoten erhöht die Anzahl der Komponenten.

(d) Gegenbsp: Betrachte einen Stern-Graph $K_{1,8k-1}$, $k \geq 2$. Dann ist in diesem Graph sind alle Kanten benachbart und damit ist die Matchingzahl maximal 1.

(e) $\mu(G) = 0 \iff G$ enthält keine Kreise $\Rightarrow G$ enthält keine Kreise ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$.

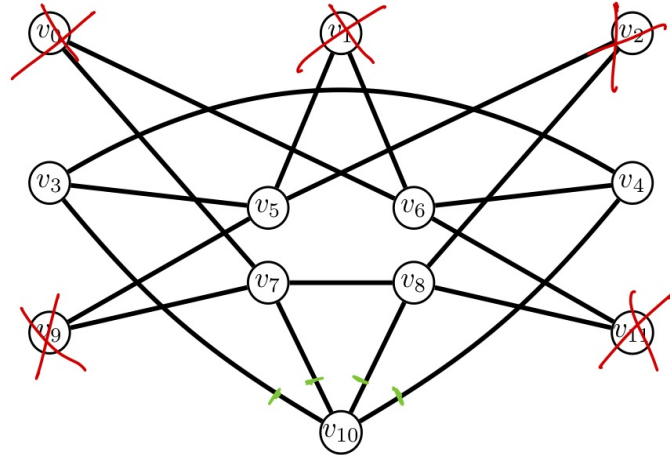
(?) Gegenbsp: Betrachte $G := K_4$. Dann ist $\chi(K_4) = 4$, obwohl $\mu(K_4) = 3$.



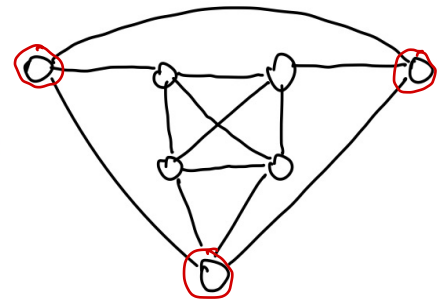
Aufgabe 2:

6 Punkte

Ist der Graph G in Abbildung 1 planar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.



1. Zunächst lösche Unterteilungsknoten



2. Kontrahiere die Außenknoten und bekomme Minor K_5

Aufgabe 3:

6 Punkte

Beantworten Sie folgende Fragen mit Begründung.

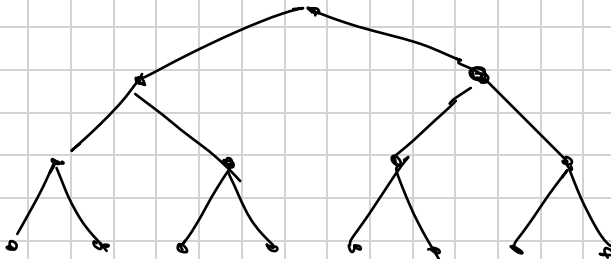
a) Gibt es einen planaren Graphen mit der Gradsequenz $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$?

b) Gibt es einen planaren Graphen mit der Gradsequenz $(3, 3, 4, 5, 5, 6, 6)$?

a) Sei G ein Graph mit der Gradsequenz $(d_i)_{i \in 15}$ wie oben.

$$\sum_{i=1}^{15} d(v_i) = 8 + 2 + 3 \cdot (15 - 9) = 28 = 2 \cdot 15 - 2 = 2n - 2$$

$\Rightarrow G$ ist ein Baum mit $n(G) = 15$, $m(G) = 14$



$$\sum_{i=1}^7 d(v_i) = 3 \cdot 2 + 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 32$$

$\Rightarrow m(G) = 16$, $n(G) = 7$

Obwohl $m(G) \leq 3n(G) - 6 = 15$ in einem ebenen Graph

Aufgabe 4:**8 Punkte**

Seien F und F' zwei Wälder mit $V(F) = V(F')$ und $m(F) < m(F')$.

Zeigen Sie, dass es eine Kante $e \in E(F') \setminus E(F)$ gibt so, dass $F + e$ wieder ein Wald ist.

Seien $(F_i)_{i \in K}$ Istgkomponente von F mit $\bigcup_{i \in K} F_i = F$.

Für einen Baum B gilt: $|E(B)| = |V(B)| - 1$

Da jede einzelne F_i ein Baum ist und $F'[V(F_i)]$ ein Wald ist, gilt:

$$m(F_i) = n(F_i) - 1$$

$$m(F'[V(F_i)]) \leq n(F'[V(F_i)]) - 1$$

wobei wegen $n(F_i) = n(F'[V(F_i)])$ gilt:

$$\forall i \in K: m(F'[V(F_i)]) \leq m(F_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k m(F'[V(F_i)]) \leq m(F) < m(F')$$

$$\Rightarrow \exists xy \in E(F') : x \in V(F_i), y \in V(F_j), i \neq j.$$

$$\Rightarrow F + xy \text{ ist Wald.} \quad \square$$

Aufgabe 5:

8 Punkte

Sei G ein Graph.

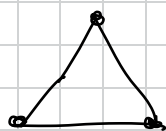
- a) Zeigen Sie $\lambda(G) \geq 2$, wenn G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume besitzt.
- b) Gilt die Umkehrung in a) auch, das heißt, folgt aus $\lambda(G) \geq 2$, dass G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume besitzt?

a) Beh: $G = (V, E)$ besitzt kantendisj. aufspannende Bäume $H = (V, E_1)$, $K = (V, E_2)$ (also $E_1, E_2 \subseteq E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), dann $\lambda(G) \geq 2$.

Bew:

Für alle $a, b \in V$ mit $a \neq b$ existieren zwei kantendisjunkte Wege in G und damit nach dem Satz von Menger ist $\lambda(G) \geq 2$.

b) Gegenbsp:



hat $\lambda(G) = 1$ obwohl es keine zwei kantendisj. aufspannender Bäume gibt.

Aufgabe 6:**10 Punkte**Sei $k \geq 3$ eine ganze Zahl und sei G_k der Graph mit

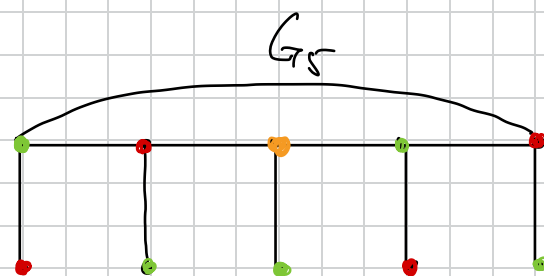
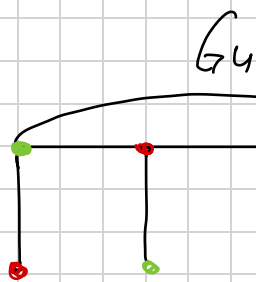
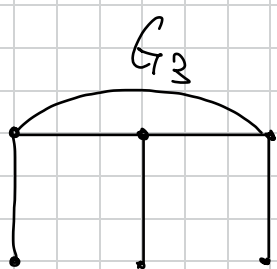
$$V(G_k) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq k\} \quad \text{und} \quad E(G_k) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i \mid 1 \leq i < k\} \cup \{u_k u_1, u_k v_k\}.$$

a) Zeichnen Sie G_4 und G_5 .b) Bestimmen Sie $\chi(G_k)$ für alle $k \geq 3$.c) Bestimmen Sie $\chi'(G_k)$ für alle $k \geq 3$.

$$= \{u_i u_{i+1} \mid i \in \underline{k-1}\} \cup \{u_k u_1\} \\ \cup \{u_i v_i \mid i \in \underline{k}\}$$

$$\triangleright k=3: V(G_3) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G_3) = \{u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_1, u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3\}$$



$$b) \quad \omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

$$\Rightarrow 2 \leq \chi(G) \leq 3 \Rightarrow \chi(G) \in \{2, 3\}$$

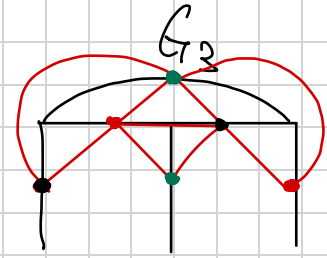
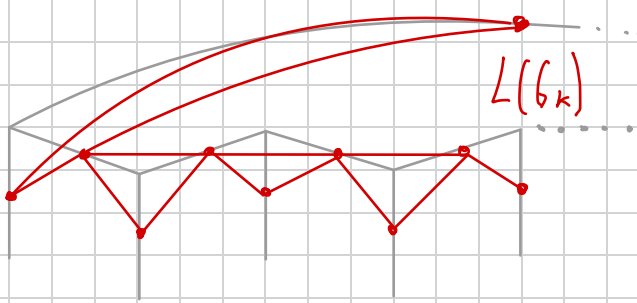
Nach Def. enthält G_{2k} , $k \geq 2$ einen einzigen Kreis $(u_1 u_2, \dots, u_{2k} u_1)$ gerader Länge $2k$.

Damit ist G_{2k} bipartit und damit 2-färbbar.

Die Graphen G_{2k+1} , $k \geq 2$ enthalten auch den gleichen Kreis aber jetzt ungerader Länge. Damit ist $\chi(G) > 2$ und daher $\chi(G) = 3$.

$$c) \quad \chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\} = \{3, 4\} \quad (\text{nach Vizing})$$

$$\deg(L(G_k)) = 2 \Rightarrow \chi'(G_k) = \chi(L(G_k)) \leq \deg(L(G_k)) + 1 = 3 \\ \Rightarrow \chi'(G_k) = 3$$



Aufgabe 7:

14 Punkte

Sei G ein Graph der Ordnung n so, dass für alle Paare nicht adjazenter Knoten x und y gilt $d(x) + d(y) \geq n - 1$. Zeigen Sie, dass G semi-Hamiltonsch ist.

Li: $G = (V, E)$. Betrachte jetzt $G' = (V \cup \{v\}, E')$ mit $v \notin V$ und $E' = E \cup \{av \mid a \in V\}$. Dann ist $|G'| = n$ und:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V: xy \notin E' &\Rightarrow d_{G'}(x) + d_{G'}(y) \\ &= d_G(x) + d_G(y) + 2 \geq n + 1 \end{aligned}$$

(v ist mit allen benachbart)

Also nach Lemma von Ore ist G hamiltonisch und damit $G - v$ ist semi-hamiltonisch.

Aufgabe 8:**14 Punkte**

Es sei $G = K_{r_1, r_2, \dots, r_p}$ der vollständige p -partite Graph mit $p \geq 2$ und $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$. Zeigen Sie, dass G genau dann einen 1-Faktor besitzt, wenn $n(G)$ gerade ist und $\sum_{i=1}^{p-1} r_i \geq r_p$ gilt.

Nach Gallai's Theorem gilt

$$\alpha(G) + \tau(G) = n(G)$$

Weiter nach 5.6:

$$\alpha(G) \geq \max_i r_i = r_p$$

Es gilt

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

$$\Rightarrow \nu(G) \leq \tau(G) = n(G) - \alpha(G) = n(G) - r_p$$

Da 1-Faktor genau perfektes Matching, ist $\nu(G) = \frac{1}{2} n(G)$ und daher:

$$\frac{1}{2} n(G) \leq n(G) - r_p \Rightarrow n(G) \geq 2r_p$$

Da $\sum_{i=1}^p r_i = n(G)$, ist

$$\sum_{i=1}^{p-1} r_i + r_p = n(G) \geq 2r_p$$

$$\Rightarrow r_p \leq \sum_{i=1}^{p-1} r_i.$$