

6. Übungsblatt zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Abgabe bis spätestens 16.07.2025, 23:59 Uhr

Hinweise:

- Bitte beachten Sie die geänderte Abgabefrist.
- Die Aufgaben 4-8 behandeln die Themen degeneracy, Knoten- und Kantenfärbung, welche erst in der Vorlesungswoche vom 07.07.2025 eingeführt werden.

Aufgabe 1:

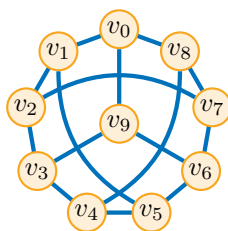
2 Punkte

Sei G ein planarer Graph der Ordnung $n(G) \geq 11$. Zeigen Sie, dass sein Komplement $\overline{G}$ nicht planar ist.

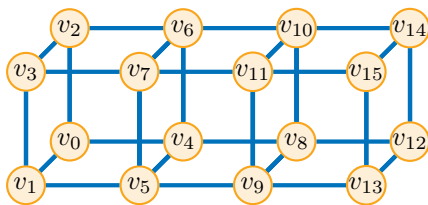
Aufgabe 2:

3 Punkte

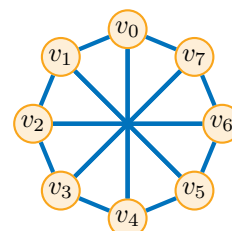
Entscheiden Sie begründet, welche der drei Graphen G_1 , G_2 und G_3 in Abbildung 1 planar sind und welche nicht.



G_1



G_2



G_3

Abbildung 1: Die Graphen G_1 , G_2 , G_3 .

Aufgabe 3:

3 Punkte

Sei G ein planarer Graph mit Minimalgrad $\delta \geq 3$ und Maximalgrad Δ . Weiter sei n_i die Anzahl der Knoten vom Grad i für alle $i = 3, 4, \dots, \Delta$. Zeigen Sie, dass

$$n_5 + 2n_4 + 3n_3 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots + (\Delta - 6)n_\Delta$$

und folgern Sie, dass mindestens 4 Knoten in G vom Grad höchstens 5 sind.

Aufgabe 4:

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung.

Sei G_1 ein Graph der Ordnung n und für alle $i = 1, \dots, n$ seien $v_i \in G_i$ mit $d_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$ sowie $G_{i+1} = G_i - v_i$. Dann gilt

$$\deg(G_1) = \max\{\delta(G_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Aufgabe 5:**3 Punkte**

Seien G und H Graphen mit $V(G) = V(H)$. Zeigen Sie, dass

$$\chi(G \cup H) \leq \chi(G)\chi(H).$$

Nun sei $G \cong \overline{G}$ ein selbstkomplementärer Graph der Ordnung $n \geq 1$. Folgern Sie, dass

$$\lceil \sqrt{n} \rceil \leq \chi(G) \quad (1)$$

und finden Sie einen selbstkomplementären Graphen G der Ordnung $n \geq 2$, der (1) mit Gleichheit erfüllt.

Aufgabe 6:**2 Punkte**

Bestimmen Sie alle Graphen G mit $\chi(G) = 3$ und der Eigenschaft, dass $\chi(H) < \chi(G)$ für alle echten Teilgraphen $H \subseteq G$.

Aufgabe 7:**1.0 Punkte**

Sei G ein Graph. Wenn $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_k$ eine Partition seiner Knotenmenge ist so, dass $G[A_i]$ vollständig ist für alle $i = 1, \dots, k$, dann heißt $\{A_1, \dots, A_k\}$ *Cliquen-Überdeckung von G* (der Größe k). Die minimale Größe unter allen Cliquen-Überdeckungen von G ist die *Cliquen-Überdeckungszahl* $\theta(G)$.

Zeigen Sie, dass $\chi(\overline{G}) = \theta(G)$.

Aufgabe 8:**4 Punkte**

Folgendes Resultat wird in der Vorlesung gezeigt:

$$\text{Für jeden bipartiten Graphen } G \text{ gilt } \chi'(G) = \Delta(G). \quad (2)$$

Ziel dieser Aufgabe ist ein alternativer Beweis. Sie dürfen im folgenden also weder das Resultat selbst noch dessen Beweis aus der Vorlesung verwenden.

Gehen Sie wie folgt vor. Zeigen Sie zuerst, dass für jeden r -regulären bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = r$. Zeigen Sie dann, dass für jeden bipartiten Graphen G mit Maximalgrad Δ ein Δ -regulärer bipartiter Graph H mit $G \subseteq H$ existiert. Folgern Sie daraus (2).

Viel Erfolg!