



5. Übungsblatt zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Abgabe spätestens in der Übung am 04.07.2025

Aufgabe 1:

2 Punkte

Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B , wobei $|A| = |B| = n$ ist. Erfüllen die nicht adjazenten Knoten $a \in A$ und $b \in B$ die Bedingung $d_G(a) + d_G(b) \geq n + 1$, so zeigen Sie, dass G genau dann Hamiltonsch ist, wenn $G + ab$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n \geq 3$ mit $2m(G) > (n - 1)^2$. Zeigen Sie, dass G Hamiltonsch ist.

Aufgabe 3:

2 Punkte

Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G die Ungleichung $\alpha(G) \geq \pi(G)$ gilt und geben Sie eine unendliche Klasse von zusammenhängenden Graphen an für die Gleichheit gilt. Hierbei bezeichnen $\alpha(G)$ die Unabhängigkeits- und $\pi(G)$ die Pfadüberdeckungszahl von G .

Aufgabe 4:

2 Punkte

Es sei G ein p -regulärer bipartiter Graph für ein $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass G genau dann r -faktorisierbar ist, wenn $p = r \cdot t$ für ein $t \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter zusammenhängender Graph mit der Eigenschaft, dass jede Kante von G zu einem perfekten Matching gehört. Zeigen Sie, dass G ein Block ist.

Aufgabe 6:

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:

Es sei G ein Graph der Ordnung $n(G) \geq 2$. Dann gilt $\alpha(G) + \tau(G) = n(G)$, wobei $\alpha(G)$ die Unabhängigkeitszahl und $\tau(G)$ die Knotenüberdeckungszahl von G ist.

Aufgabe 7:

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:

Es sei G ein bipartiter Graph und M ein Matching von G . Wenn $|M| < \nu(G)$, dann gibt es einen Verbesserungsweg P .

Aufgabe 8:

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:

Es seien a, b zwei verschiedene Knoten eines Graphen G . Die kleinste Mächtigkeit einer a von b trennenden Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter $a - b$ -Wege in G .

Aufgabe 9:

4 Punkte

Zeigen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung:

Sei G ein k -zusammenhängender Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Wenn $k \geq \alpha(G)$, so ist G Hamiltonsch. Dazu können Sie wie folgt vorgehen:

- Zeigen Sie Hilfsaussage 1.
- Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha(G) = 1$ und $\alpha(G) \geq 2$.
- Folgern Sie im Fall $\alpha(G) \geq 2$, dass ein längster Kreis C in G mehr als k Knoten hat und nutzen Sie Hilfsaussage 1 um zu zeigen, dass C sogar ein Hamiltonkreis ist.

Hilfsaussage 1: Es sei G ein schlichter und k -fach zusammenhängender Graph. Sind die Knoten $a, y_1, y_2, \dots, y_k$ aus G paarweise verschieden, so existieren k Wege vom Knoten a zu den Knoten $y_1, y_2, \dots, y_k$ die paarweise nur den Knoten a gemeinsam haben.

Viel Erfolg!