



4. Übungsblatt zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Abgabe spätestens in der Übung am 20.06.2024

Aufgabe 1:

2 Punkte

Zeigen Sie: Sei G ein schlichter Graph mit $n(G) \geq 1$ und $F \subseteq E(G)$ mit $|F| < \mu(G)$, wobei $\mu(G) = m(G) - n(G) + c(G)$ die zyklomatische Zahl des Graphen ist und $c(G)$ die Anzahl seiner Komponenten. Zeigen Sie, dass $G - F$ einen Kreis enthält. Zeigen Sie außerdem, dass es eine Menge $F' \subseteq E(G)$ mit $|F'| = \mu(G)$ gibt, sodass $G - F'$ ein Wald ist.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Es sei G ein semi-Eulerscher Graph mit $\delta(G) \geq 3$. Man beweise $\mu(G) \geq n(G)$.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Es sei G ein Eulerscher Graph und C ein Kreis in G maximaler Länge $L(C)$. Zeigen Sie, dass $L(C) \geq \left\lceil \frac{m(G)}{\mu(G)} \right\rceil$ und $L(C) \geq \left\lceil \frac{n(G)-1}{\mu(G)} \right\rceil + 1$.

Aufgabe 4:

3 Punkte

Es sei G ein nicht trivialer zusammenhängender Kactusgraph. Zeigen Sie, dass G genau dann Eulersch ist, wenn G keine Brücke besitzt.

Definition: Ein Graph G , der die Gleichung $\mu(G) = \nu(G)$ erfüllt, heißt Kactusgraph. Mit $\nu(G)$ bezeichnen wir die Anzahl Kreise eines Graphen G .

Aufgabe 5:

3 Punkte

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Ein nicht trivialer, zusammenhängender Digraph D ist genau dann Eulersch, wenn $d_D^+(x) = d_D^-(x)$ für alle Knoten $x \in V(D)$ gilt.

Aufgabe 6:

3 Punkte

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Ein nicht trivialer, zusammenhängender Digraph ist genau dann eulersch, wenn man ihn in kantendisjunkte orientierte Kreise zerlegen kann.

Aufgabe 7:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter r -regulärer Graph gerader Ordnung $n \geq 4$. Zeigen Sie, dass G oder sein Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 8:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n \geq 4$ und es gelte $d_G(x) + d_G(y) \geq n + 1$ für alle nicht adjazente Knoten $x, y \in V(G)$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass jeder Knoten von G auf einem Kreis der Länge $n - 1$ liegt.

Viel Erfolg!