

3. Übungsblatt zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Abgabe spätestens in der Übung am 23.05.2025

Aufgabe 1:

3 Punkte

Seien T, T' zwei aufspannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen G . Zeigen Sie für eine Kante $e \in E(T) \setminus E(T')$, dass es eine Kante $e' \in E(T') \setminus E(T)$ gibt, so dass beide $T' + e - e'$ und $T - e + e'$ aufspannende Bäume von G sind.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass jeder schlichte Graph G einen aufspannenden bipartiten Teilgraphen F enthält, so dass $d_F(v) \geq \frac{1}{2}d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass ein schlichter Graph einen K_3 -Minor hat genau dann, wenn er einen Kreis enthält.

Aufgabe 4:

3 Punkte

Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph einen K_3 -Minor und $K_{3,3}$ -Minor enthält.

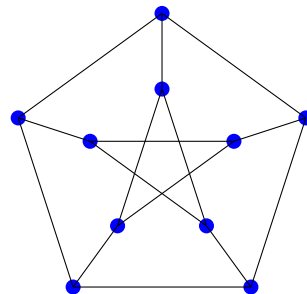


Abbildung 1: Der Petersen-Graph.

Aufgabe 5:

1+3 Punkte

Sei $D = (d_1, \dots, d_n)$ eine Sequenz natürlicher Zahlen mit $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Angenommen, es existiert ein Graphen G mit Gradsequenz D . Seien $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V(G)$ mit $v_1v_2, w_1w_2 \in E(G)$ und $v_1w_1, v_2w_2 \notin E(G)$. Dann hat der Graph $\tilde{G}$ mit $V(\tilde{G}) = V(G)$ und $E(\tilde{G}) = E(G) \setminus \{v_1v_2, w_1w_2\} \cup \{v_1w_1, v_2w_2\}$ ebenfalls Gradsequenz D .
- Es existiert ein Graph G mit Gradsequenz D genau dann, wenn ein Graph G' mit Gradsequenz $D' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ existiert.

Aufgabe 6:

2 Punkte

Berechnen Sie die maximal gewichtete stabile Menge $\alpha(T, c)$ für den folgenden Graphen in Abbildung 2 (nächste Seite, mit Gewichten an den Knoten).

Viel Erfolg!

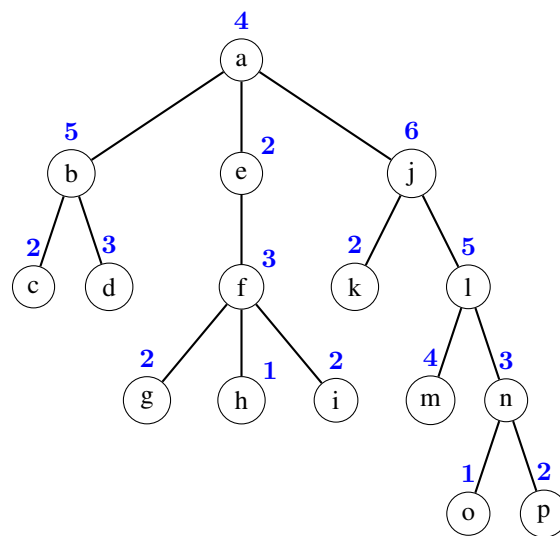


Abbildung 2: Graph Aufgabe 6