

Aufgabe 1:

3 Punkte

Seien T, T' zwei aufspannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen G . Zeigen Sie für eine Kante $e \in E(T) \setminus E(T')$, dass es eine Kante $e' \in E(T') \setminus E(T)$ gibt, so dass beide $T' + e - e'$ und $T - e + e'$ aufspannende Bäume von G sind.

Kurz gesagt handelt es sich um den Austauschseigenschaftsbeweis für Spannbäume (also Basen im zugehörigen Graphen-Matroid): Jede Kante, die in einem Spannbaum enthalten, im anderen aber fehlt, lässt sich gegen eine passende Kante aus dem zweiten Baum austauschen, ohne die Spannbaumeigenschaft zu verletzen.

$T - e$ hat zwei Komponenten, H und H' , da T ein Baum ist. $T' + e$ hat einen Kreis, da T einen Weg zwischen dem Endknoten von c hat. Da e ein Ende in H und ans in H' hat, muss es auf diesem Weg eine Kante e' mit der selben Eigenschaft geben.

$T - e + e'$ ist wieder zshg., da e' zwischen H und H' "verbindet" und kreislos ist, also ein Baum.

$T' + e - e'$ ist zshg, da e' auf einem Kreis in $T' + e$ liegt und kreislos, da e auf dem einzigen Kreis in $T' + e$ liegt.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass jeder schlichte Graph G einen aufspannenden bipartiten Teilgraphen F enthält, so dass $d_F(v) \geq \frac{1}{2}d_G(v)$ für alle $v \in V(G)$.

Sei $F = G[H(A)]$, dann ist F bipartit mit Partition A und $B = V(G) \setminus A$ per Definition. Sei $v \in V$ bel und obd $A \vee v \in A$. Sei $N_G(v) = \{vw \in E(G) \mid \text{die zu } v \text{ adjazenten Kanten in } G\}$. Dann gilt $N_F(v) = N_G(v) \cap H(A)$. Falls $d_F(v) < \frac{\Delta}{2} d_G(v)$, so gilt für $A' = A \setminus \{v\}$, dass $H(A') = H(A) \setminus N_F(v) \cup (N_G(v) \setminus N_F(v))$ und somit

$$|H(A')| = |H(A)| - \underbrace{|N_F(v)|}_{= d_F(v) < \frac{\Delta}{2} d_G(v)} + \underbrace{|N_G(v)|}_{= d_G(v)} = |H(A)| + \frac{\Delta}{2} d_G(v) > |H(A)|$$

Widerspruch zur Maximalität von $|H(A)|$. Also gilt $d_F(v) \geq \frac{\Delta}{2} d_G(v)$ für den aufspannenden bipartiten Teilgr F .

Aufgabe 3:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass ein schlichter Graph einen K_3 -Minor hat genau dann, wenn er einen Kreis enthält.

adjazenten Knoten in G dann gilt $d_G(v) \leq \frac{1}{2} d_G(v)$, so gilt für $A' = A \setminus \{v\}$, dass

Aufgabe 3

" $\Leftarrow$ " Sei G ein schlichter Graph mit einem Kreis. Falls der Kreis Länge 3 hat, sind wir fertig. Sonst wähle bel. $e \in E(C)$ und kontrahieren diese. $G' = G/vw$. Dann enthält G' einen Kreis der Länge $|E(C)| - 1$. Iterieren führt zu einem Kreis der Länge 3.

" $\Rightarrow$ " Sei G ein schlichter Graph mit Kreis C sowie G und $x, y \in E(G)$ so, dass $G \setminus xy = G$. Sei $v_{xy} \in V(G)$ der Knoten, der durch Kontraktion von xy entstanden ist. Falls $v_{xy} \notin V(C)$ so ist C auch ein Kreis in G . Sei der Kreis gegeben durch $(v_{xy}, e_1, \dots, e_k, v_{xy})$, dann müssen $e_1 \in N_G(x) \cup N_G(y)$, oder e_k adjazent zu x falls e_k

auch adjazent zu x , so ist $(x, e_1, \dots, e_k, x)$ Kreis in G . Falls e_k adj. zu y , so ist $(x, e_1, \dots, e_k, y, xy, x)$ Kreis in G . Da K_3 ein Kreis ist, muss jeder Graph, der ein K_3 -Minor besitzt, auch einen Kreis haben.

Aufgabe 4:

3 Punkte

Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph einen K_3 -Minor und $K_{3,3}$ -Minor enthält.

Aufgabe 4

K_3 -Minor: Offenbar hat der Graph einen Kreis, also K_3 -Minor.

$K_{3,3}$ -Minor:

Aufgabe 6: Berechnen Sie die maximale gewichtete stabile Menge $\alpha(T, c)$ für Seite, mit Gewichten an den Knoten).

Kontrahieren Kanten $\{4,5\}, \{6,8\}, \{7,9\}, \{7,10\}$ in bel. Reihenfolge liefert $K_{3,3}$

Viel Erfolg!

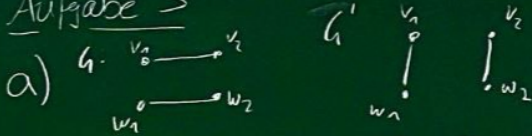
Aufgabe 5:

1+3 Punkte

Sei $D = (d_1, \dots, d_n)$ eine Sequenz natürlicher Zahlen mit $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Angenommen, es existiert ein Graphen G mit Gradsequenz D . Seien $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V(G)$ mit $v_1 v_2, w_1 w_2 \in E(G)$ und $v_1 w_1, v_2 w_2 \notin E(G)$. Dann hat der Graph $\tilde{G}$ mit $V(\tilde{G}) = V(G)$ und $E(\tilde{G}) = E(G) \setminus \{v_1 v_2, w_1 w_2\} \cup \{v_1 w_1, v_2 w_2\}$ ebenfalls Gradsequenz D .
- b) Es existiert ein Graph G mit Gradsequenz D genau dann, wenn ein Graph G' mit Gradsequenz $D' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ existiert.

Aufgabe 5

a) 

Es gilt $d_{\tilde{G}}(x) = d_G(x)$ für alle $x \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$
 Für $x \in \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ gilt $d_{\tilde{G}}(x) = d_G(x) - 1 + 1 = d_G(x)$
 Somit haben alle Knoten gleichen Grad und D ist Gradsequenz von $\tilde{G}$.

b) " $\Leftarrow$ " Sei G' Graph mit Gradsequenz D' . Nenne $D' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ und $V(G') = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ mit $d_{G'}(v'_i) = d'_i$ für alle $v'_i \in V(G')$
 Definiere G mit $V(G) = G' \cup \{v_n\}$ und

Sei $F = G \setminus H(A)$, dann ist F bipartit mit Partition A und $B = V(G) \setminus A$ per Definition. Sei $v \in V$ bel. und obd $A \vee B$. Sei $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$ die zu v adjazenten Knoten in G . Dann gilt $N_F(v) = N_G(v) \cap H(A)$.
 Falls $d_F(v) < \frac{1}{2} d_G(v)$, so gilt für $A' = A \setminus \{v\}$, dass $H(A') = H(A) \setminus N_F(v) \cup (N_G(v) \setminus N_F(v))$ und somit

$$|H(A')| = |H(A)| - |N_F(v)| + |N_G(v) \setminus N_F(v)|$$

$$= |H(A)| - d_F(v) + d_G(v) - d_F(v)$$

$$= |H(A)| + d_G(v) - 2d_F(v)$$

$$> |H(A)|$$

Widerspruch zur Maximalität von $|H(A)|$. Also gilt $d_F(v) \geq \frac{1}{2} d_G(v)$ für den aufspannenden bipartiten Teilgr.

F

$E(G) = E(G') \cup \{v_1 v_2, v_1 v_3, \dots, v_1 v_{d_1+1}\}$
 Dann $d_G(v_1) = d_{G'}(v_1) + 1 = d_1$ für $i \in \{2, \dots, d_1\}$
 $d_G(v_j) = d_{G'}(v_j) = d'_j = d_j$ für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$
 und G hat Gradsequenz D .

" $\Rightarrow$ " Sei G Graph mit Gradsequenz D , $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ mit $d_G(v_i) = d_i$ für alle $v_i \in V(G)$. Sei außerdem M Menge der Grade der Nachbarn von v_1 .
 Also zu $N_G(v_1) = \{v_i \mid v_1 v_i \in E(G)\}$ ist $M = \{d_i \mid v_i \in N_G(v_1)\}$

Fall 1: $M = \{d_2, \dots, d_{d_1+1}\}$ hat $G' = G \setminus \{v_1\}$ Gradsequenz D' .

Fall 2: $M \neq \{d_2, \dots, d_{d_1+1}\}$, Sei $W = \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$

Aufgabe 6:**2 Punkte**

Berechnen Sie die maximal gewichtete stabile Menge $\alpha(T, c)$ für den folgenden Graphen in Abbildung 2 (nächste Seite, mit Gewichten an den Knoten).

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph von oben mit $c: V \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 $v \mapsto c_v$.
 Anwende den Algorithmus aus der Vorlesung induktiv.

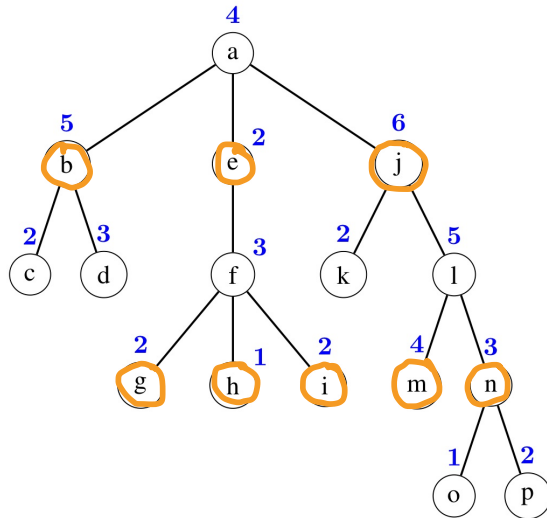
(i) Für ein Blatt $v \in V$:

$$A(v) = c_v, \quad B(v) = 0$$

(ii) Für einen inneren Knoten $v \in V$ mit Kinder $x_1, \dots, x_n \in V$:

$$B(v) = \sum_{i=1}^n A(x_i), \quad A(v) = \max\{c_v + \sum_{i=1}^n B(x_i), B(v)\}$$

Markiere in jedem Schritt Knoten, die in Maximum auftreten.



Man bekommt dann:

	c	d	g	h	i	k	m	o	p
$B(\cdot)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A(\cdot)$	2	3	2	1	2	2	4	1	2

	b	f	n	e	l	j	a
$B(\cdot)$	5	5	3	3	7	9	25
$A(\cdot)$	5	3	3	7	8	13	25

$$\Rightarrow \alpha(T, c) = A(b) + A(k) + A(j) = c_b + c_e + c_g + c_h + c_i + c_j + c_m + c_n$$

$\Rightarrow \{b, e, g, h, i, j, m, n\}$ ist maximal gewichtete stabile Menge.