



2. Übungsblatt zur Vorlesung GRAPHENTHEORIE I

Abgabe spätestens in der Übung am 09.05.2025

Aufgabe 1:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) = 2q$ mit $q \in \mathbb{N}$. Enthält G keine Dreiecke (d.h. keine Kreise der Länge 3), so zeige man $m(G) \leq q^2$.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei G ein zusammenhängender Graph und P, Q zwei längste Wege in G .
Zeigen Sie: $V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$.

Aufgabe 3:

3 Punkte

Es sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) \geq 3$. Man zeige: Ist $\text{diam}(G) = \text{rad}(G)$, so besitzt G keine Brücke.

Aufgabe 4:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 2$. Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$$

Aufgabe 5:

2 Punkte

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 2$. Beweisen Sie die folgende Folgerung aus der Vorlesung:

$$\text{diam}(G) \geq 3 \Rightarrow \text{diam}(\overline{G}) \leq 3$$

Aufgabe 6:

4 Punkte

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T .

- a) T ist ein Baum;
- b) Zwischen je zwei Knoten enthält T genau einen Weg;
- c) T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend, aber für jede Kante e von $E(T)$, ist $T - e$ nicht zusammenhängend;
- d) T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos, aber für je zwei nicht benachbarte Knoten $x, y \in V(T)$ enthält $T + xy$ einen Kreis.

Aufgabe 7:

2 Punkte

Man bestimme alle nicht-isomorphen Bäume mit 6 Ecken.

Aufgabe 8:

3 Punkte

Für jeden Baum T der Ordnung $n(G) \geq 2$ gibt es eine Ecke $u \in V(T)$, so dass keine Komponente von $T - u$ mehr als $\frac{n(G)}{2}$ Ecken enthält.

Viel Erfolg!