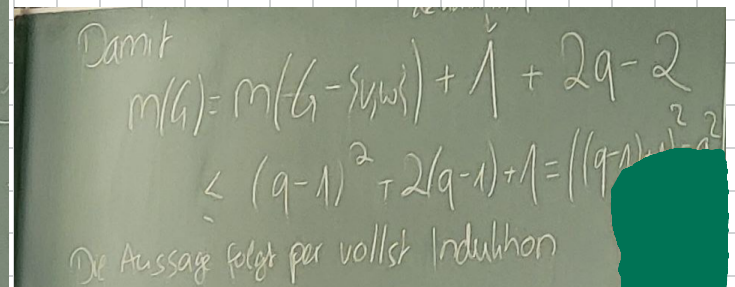
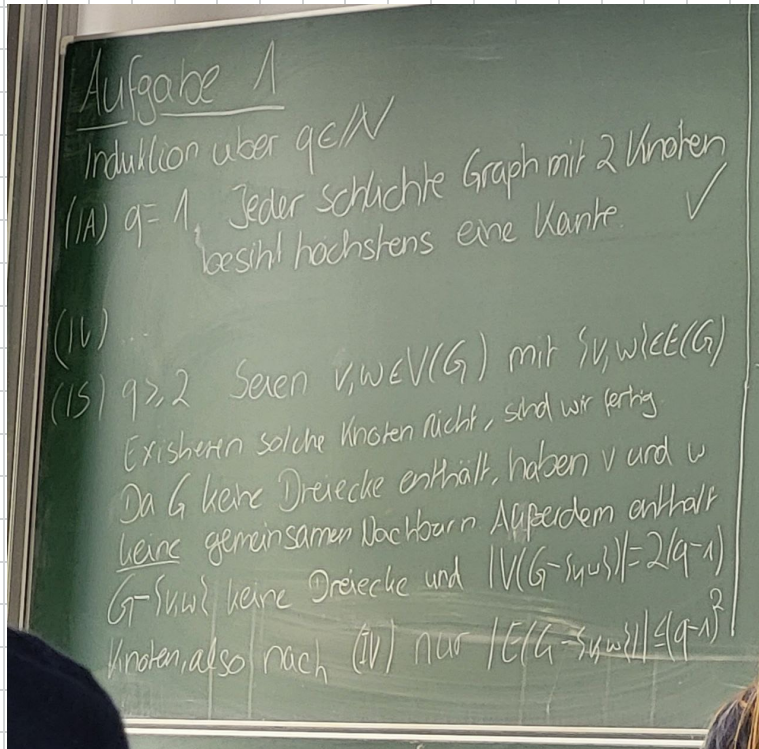


Aufgabe 1:**2 Punkte**

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) = 2q$ mit $q \in \mathbb{N}$. Enthält G keine Dreiecke (d.h. keine Kreise der Länge 3), so zeige man $m(G) \leq q^2$.

**Aufgabe 2:****2 Punkte**

Sei G ein zusammenhängender Graph und P, Q zwei längste Wege in G .
Zeigen Sie: $V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$.

Seien $P = (v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n)$ und $Q = (w_1, e'_1, \dots, e'_{n-1}, w_n)$ Wege mit $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$. Da G zshg. ist, existieren Knoten $v_i \in V(P)$, $w_j \in V(Q)$, sodass es einen $v_i - w_j$ -Weg R in G gibt mit $V(R) \cap V(P) = \{v_i\}$ und $V(R) \cap V(Q) = \{w_j\}$.
Da R mindestens zwei Knoten enthält, hat er mindestens Länge 1. Außerdem, sei oBdA $i, j \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Dann hat der Weg $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_i, \dots, w_j, \dots, w_1)$ Länge $\geq i + j + 1 \geq k + 1$ und damit sind P und Q keine längste Wege.

Aufgabe 3:**3 Punkte**

Es sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) \geq 3$. Man zeige: Ist $\text{diam}(G) = \text{rad}(G)$, so besitzt G keine Brücke.

Definiere Exzentrizität $e(v) = \max_{w \in V(G)} d(v, w)$.

Dann $\text{rad} G = \min_{v \in V(G)} e(v)$ und $\text{diam} G = \max_{v \in V(G)} e(v)$.

$\Rightarrow$ trivial $\text{rad} G \leq e(v) \leq \text{diam} G \quad \forall v \in V(G)$.

Insb. aus $\text{rad} G = \text{diam} G$ folgt $\forall v \in V(G): e(v) = \text{rad} G = \text{diam} G$.

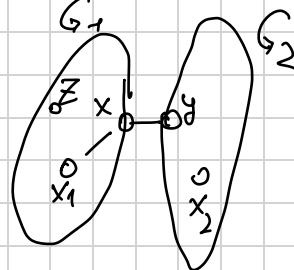
Angenommen, es ex eine Brücke $\{x, y\} \in E(G)$. Also ist $G \setminus \{x, y\}$ nicht mehr zshg und besteht aus Komponenten G_1 und G_2 . O.B.d.A. sei $n(G_1) \geq 2$ und für alle $x \in V(G_1)$ ex immer ein $z \in V(G_1) \setminus \{x\}$.

Bestimme $e(x)$, indem wir alle $d(v, x)$ (für alle $v \in V$) betrachten. Sei dazu

$x_1 \in V(G_1), x_2 \in V(G_2)$. Dann:

$$d(x_1, x) < d(x_1, y) \leq e(x) = \text{rad} G$$

$$d(x_2, x) < d(x_2, z) \leq e(x) = \text{rad} G$$



Also $d(x, v) < \text{rad}(G) = e(x)$ für alle $v \in V$. Widerspruch zu $e(v) = \text{rad} G$. Also hat G keine Brücke.

$$(N^2 4)$$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 2$

Beh: $\text{rad } G \leq \text{diam } G \leq 2 \text{rad } G$

Koch Def. ist $\text{diam } G = \max \{d_G(x, y) \mid x, y \in V\}$
 $\text{rad } G = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d_G(x, y)$

$$(i) \text{rad} = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d_G(x, y) \leq \max_{x, y \in V} d_G(x, y) = \text{diam } G$$

(ii) Da ~~ein~~ Graph endlich ist, ~~nimmt~~ ~~da~~ existiert Maximum/Minimum und nimmt sein Wert auf den folgenden Knoten:

$$\text{diam } G = d(v, w), v, w \in V$$

$$\text{rad } G = \max_{y \in V} d(u, y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{diam } G = d(v, w) &= d(v, u) + d(u, w) \leq \cancel{2 \max} \\ &= d(u, v) + d(u, w) \leq 2 \max_{y \in V} d(u, y) \\ &= 2 \text{rad } G. \end{aligned}$$

(wegen der Minimalität der Distanzen)

Aufgabe 5:**2 Punkte**

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 2$. Beweisen Sie die folgende Folgerung aus der Vorlesung:

$$\text{diam}(G) \geq 3 \Rightarrow \text{diam}(\overline{G}) \leq 3$$

Aus der Vorlesung ist schon bekannt:

$$\text{diam} G \geq 4 \Rightarrow \text{diam} \overline{G} \leq 4$$

Seien $u, v \in V(G)$ mit $\text{diam} G = d_G(u, v)$. Seien $x, y \in V(G)$.

Falls $\{x, y\} \in E(G)$ gilt $d_G(x, y) = 1$. Sei also $\{x, y\} \in E(G)$.

▷ Ist $\{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$, oBdA $x = u \Rightarrow d(x, v) = 3$

Weilen $\{x, y\} \in E(G)$ ist sogar $d_G(y, v) = 3 - 1 = 2$.

Also sind $\{x, y\}, \{y, v\} \in E(\overline{G})$ und $d_{\overline{G}}(x, y) \leq 2$.

▷ Ist $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$, so ist jeder Knoten $w \in V(G)$ muss entweder zu u oder zu v benachbart sein.

• Falls x und y beide zu (oBdA) u benachbart sind, gilt $\{x, v\} \notin E(G)$ und $\{y, v\} \notin E(G)$, also $d_{\overline{G}}(x, y) = 2$.

• Falls (oBdA) u zu x und v zu y benachbart sind, muss entweder $\{x, v\} \notin E(G)$, $\{y, u\} \notin E(G)$ und $\{u, v\} \notin G$. Also $d_{\overline{G}}(x, y) = 3$.

Aufgabe 6:

4 Punkte

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T .

- a) T ist ein Baum;
- b) Zwischen je zwei Knoten enthält T genau einen Weg;
- c) T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend, aber für jede Kante e von $E(T)$, ist $T - e$ nicht zusammenhängend;
- d) T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos, aber für je zwei nicht benachbarte Knoten $x, y \in V(T)$ enthält $T + xy$ einen Kreis.

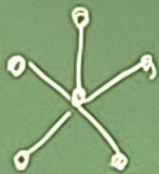
Also $\Delta_G(V, E)$
Aufgabe 6 T ist Baum $\Leftrightarrow T$ ist zsmhgd und hat keinen Kreis
"a) $\Rightarrow$ b)" T ist zsmhgd also ex min ein Weg zwischen allen
 $\forall v, w \in V(T)$ T ist kreislos, also gibt es für alle $v, w \in V(T)$
höchstens einen Weg

"b) $\Rightarrow$ c" Da es für alle $v, w \in V(T)$ einen v - w -Weg gibt, ist
 T zusammenhängend. Sei $\{v, w\} \in E(T)$, dann ist v, w der
einzige v - w -Weg in T . Also ist $T - \{v, w\}$ nicht zsmhgd.
"c) $\Rightarrow$ d" Ang es gäbe einen Kreis. Sei $\{v, w\} \in E(T)$ eine Kante auf
dem Kreis. Dann ist $T - \{v, w\}$ zusammenhängend $\wedge T$ ist
also kreislos. T ist zsmhgd, also gibt es für alle $v, w \in V(T)$
einen v - w -Weg in T . Somit gibt es in $T + \{v, w\}$ einen
Kreis.
d) $\Rightarrow$ a' T ist kreislos, also ein Wald. Seien $v, w \in T$ nicht benachbart,
dann muss in $T + \{v, w\}$ ein Kreis existieren, der v, w beinhaltet.
Dann gab es in T aber schon einen v - w -Weg, also ist T
zsmhgd und somit ein Baum.

Aufgabe 7

Sortiere nach $\text{diam}(T)$ Es gilt $2 \leq \text{diam}(T) \leq 5$.

$$\text{diam}(T) = 2$$



$$\text{diam}(T) = 5$$



$$\text{diam}(T) = 4$$



$$\text{diam}(T) = 3$$

