

(12)

1. $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$. Beh: $\alpha(G) = \omega(G)$

Beweis:

Eine Knotenmenge $W \subseteq V(G)$ ist unabh. ~~gdw.~~ $\Leftrightarrow$ für alle $u, w \in W$
 $uw \notin E(G)$ ~~gdw.~~ $\Leftrightarrow \forall u, w \in W: uw \in E(\bar{G})$
 $\Leftrightarrow W$ ist Clique in $\bar{G}$.

Und damit: $\alpha(G) = \max_{\substack{W \text{ unabh.} \\ \text{in } G}} |W| = \max_{\substack{W \text{ clique} \\ \text{in } \bar{G}}} |W| = \omega(\bar{G})$.

(13)

2. $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$. Beh: $\Delta(G) - \delta(G) \leq n(G) - 2$

g) Beh: $\Delta(G) - \delta(G) \leq n(G) - 2$

Da G ein einfacher Graph ist, gilt $\Delta(G) \leq n(G) - 1$ und
und $\delta(G) \geq 0$. Zu zeigen, dass die beiden Schranken nicht gleich-
zeitig angenommen werden.

$\triangleright$ Angenommen, $\delta(G) = 0$. Dann es ex ein $v \in V(G)$ mit $N_G(v) = \emptyset$.
Dann kann Knoten zu allen anderen benachbart sein. Also $\Delta(G) \leq n(G) - 1$.
 $\triangleright$ Ang., $\Delta(G) = n(G) - 1$. Dann es ex ein Knoten, der zu jedem
anderen Knoten benachbart ist und somit ist $\delta(G) \geq 1$.

b) Beh: $\exists v, w \in V: v \neq w$ und $d_G(v) = d_G(w)$.

Es gilt $0 \leq d_G(v) \leq n(G) - 1$. Es gibt also $n(G)$ mögliche Werte
für $d_G(v)$. Wir haben in (a) gezeigt, dass es keine Knoten $v, w \in V(G)$
geben kann mit $d_G(v) = 0$ und $d_G(w) = n(G) - 1$. Also gibt es nur
 $n(G) - 1$ mögliche Werte für $n(G)$ Knoten. Die Aussage folgt nach
dem Schubfachprinzip.

(V03)

$G = (V, E)$ mit $n(G) \geq 2$. Beh: $\delta(G) + \delta(\bar{G}) = n - 1 \iff G$ regulär.

Beweis

" $\Rightarrow$ ": Zunächst stellen wir fest ^{das} für jedes $v \in V(G)$ gilt:

$$d_G(v) = n - 1 - d_{\bar{G}}(v)$$

Somit gilt $\delta(\bar{G}) = n - 1 - \Delta(G)$. Damit ist

$$n - 1 = \delta(G) + \delta(\bar{G}) = \delta(G) - \Delta(G) + n - 1$$

und es muss $\delta(G) = \Delta(G)$, also ist G regulär.

" $\Leftarrow$ " klar.

(V04)

$G = (V, E)$ mit $E \subseteq [V]^2$, $n(G) \geq 2$.

Beh: $\delta(G) + \Delta(G) + 1 \geq n(G) \Rightarrow G$ ist zshg.

Angenommen, dass G nicht zshg. ist.

$$\text{z.z.: } \delta(G) + \Delta(G) + 2 < n(G)$$

Sei dazu $G^1 := G[V^1]$, $V^1 \subseteq V(G)$ eine Komponente von G mit $\Delta(G^1) = \Delta(G)$ und $V^2 = V(G) \setminus V^1$, $G^2 = G[V^2]$.

Dann gilt $\delta(G^2) \geq \delta(G)$ und $|V^2| \geq \delta(G) + 1$

Außerdem gilt $|V^1| \geq \Delta(G) + 1$, also

$$n(G) = |V^1| + |V^2| \geq \Delta(G) + 1 + \delta(G) + 1 = \Delta(G) + \delta(G) + 2$$

(V05)

Beh: Für jeden nicht-trivialen Graph G gilt $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

(i) $k(G) \leq \lambda(G)$: Sei $F \subseteq E(G)$, $|F| = \lambda(G)$ sodass $G - F$ nicht zshg.

$\triangleright$ Fall 1: Es ex. ein $v \in V$, welches zu keiner Kante aus F inzident ist. Sei C die Komponente von $G - F$, die v enthält und $X = \{w \in C \mid \exists e \in F: w \in e\}$. Dann trennt X auch

v von $G - C$. Da F minimal, hat jede kante in F höchstens einen inzidenten knoten in X und somit $|F| \geq |X|$, also $\lambda(G) \geq k(G)$.

▷ Fall 2: Jeder knoten in $V[G]$ ist inzident zu einer kante aus F . Sei $v \in V[G]$ beliebig, C die komponente von $G - F$, die v enthält, und $N(v) = \{w : vw \in E[G]\}$.

Für jeden Nachbar von v gilt entweder w in C oder $vw \in F$. Wenn w in C , dann ex $w \in F$. Damit ist $|F| \leq |N(v)| = d_G(v)$ und $N(v)$ trennt alle knoten in $V \setminus (N(v) \cup \{v\})$ von $\{v\}$. Falls $V = N(v) \cup \{v\}$, muss G vollständig sein, da v beliebig ist. Damit $k(G) = \lambda(G) = n - 1$.

(ii) $\lambda(G) \leq \delta(G)$: Für $v \in V$ trennt die Menge aller zu v adjazenten knoten den graphen G . Somit ist G höchstens $\delta(G) - 1$ zshg.

$$\boxed{W^{\frac{n}{2}} G}$$

Sei v beliebig und C eine komponente von $G - v$.

Laut VL ist die Anzahl der knoten ungeraden Grades in $G[C]$ ist gerade. Außerdem gilt für alle $w \in V[G[C]]$, dass

$$d_G(w) - 1 \leq d_{G[C]}(w) \leq d_G(w)$$

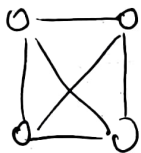
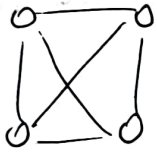
mit $d_G(w) - 1 = d_{G[C]}(w)$ genau dann, wenn $vw \in E(G)$.

Da der Graph aller knoten in G gerade ist, muss die Anzahl der knoten $w \in V[G[C]]$ mit $vw \in E(G)$ gerade sein. Da G zshg. ist, muss es mind. zwei solche knoten geben. Somit ist v zu mind. zwei knoten jeder komponente von $G - v$ benachbart und es gilt damit $2c(G - v) \leq d_G(v)$.

(11-7)

(i) Angenommen, es existiert ein Graph mit $\Delta(G)=4$, $c(G)=3$, $\delta(G)=3$ und $n(G)=12$. Dann jede Komponente hat mind. $\delta(G)+1=4$ Knoten, bei 3-Komponenten also min. 12 Knoten. Für $\Delta(G)=4$ muss eine Komponente mit 5 Knoten haben, aber $4+4+5=13 > 12 = n(G)$, Widerspruch.

(ii) Alle nicht-isomorphen Graphen mit $n(G)=13$, $c(G)=\delta(G)=3$ und $\Delta(G)=4$:



+

